Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

Σ Χ Ο Λ Η   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Ω Ν
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ω Ν   Κ Α Ι   Φ Υ Σ Ι Κ Ω Ν   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ω Ν

Τ Ο Μ Ε Α Σ   Φ Υ Σ Ι Κ Η Σ

Κανονική εξέταση στο μάθημα   ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Διδάσκων: Κ. Χριστοδουλίδης   **13 Ιουλίου 2011**

Διάρκεια εξέτασης: 2 1/4 ώρες   **Βαθμός «Άριστα» αντιστοιχεί σε 10 μονάδες συνολικά**

Θέμα 1 (2,5 μονάδες). (α) Ένας παρατηρητής S προσδιορίζει τις θέσεις των δύο άκρων A και B ενός τρένου, που κινείται ως προς αυτόν με ταχύτητα *V*, και βρίσκει ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα άκρα βρίσκονται στα σημεία $x_{\mathrm{A}} = L/2$ και $x_{\mathrm{B}} = -L/2$, αντίστοιχα. Ποια είναι η απόσταση L_0 ανάμεσα στα δύο άκρα στο σύστημα S' του τρένου; Σε ποιες χρονικές στιγμές, t'_{A} και t'_{B}, φαίνεται στον S' ότι ο S έκανε τις δύο μετρήσεις; [*Υπόδειξη:* Υπολογίστε. Μη μαντέψετε!]

(β) Ένας παλμός από N_0 ασταθή σωματίδια παράγεται στο σημείο $x = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, στο σύστημα S του εργαστηρίου. Είναι γνωστό ότι, στο δικό τους σύστημα αναφοράς, τα σωματίδια διασπώνται με μέση διάρκεια ζωής *τ*. Παρατηρείται ότι στον παλμό παραμένουν N_0/e σωματίδια που δεν έχουν διασπαστεί όταν ο παλμός έχει ταξιδέψει απόσταση *L* στο εργαστήριο ($\mathrm{e} = 2,71828...$ είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων). Με ποια ταχύτητα *V* κινούνται τα σωματίδια στο σύστημα S του εργαστηρίου; [Δίνεται: Νόμος της ραδιενέργειας: $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$.]

Θέμα 2 (2,5 μονάδες). Ένας διεγερμένος πυρήνας X^*, με μάζα ηρεμίας m_0^*, αποδιεγείρεται εκπέμποντας ένα φωτόνιο. Η μάζα ηρεμίας του αποδιεγερμένου πυρήνα X είναι m_0.

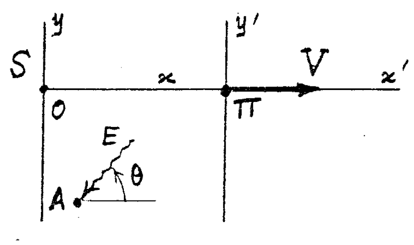
Ποια είναι η ολική ενέργεια του νέου πυρήνα, *E*, και η ενέργεια του φωτονίου, E_γ, στο σύστημα αναφοράς του αρχικού πυρήνα; Δώστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των m_0 και m_0^*.

Θέμα 3 (3 μονάδες). Πηγή φωτός Π κινείται με σταθερή ταχύτητα *V* κατά μήκος του άξονα των *x* στο σύστημα αναφοράς S. Η πηγή εκπέμπει, προς όλες τις κατευθύνσεις, φωτόνια τα οποία στο σύστημα αναφοράς S΄ της πηγής έχουν ενέργεια E_0. Στο επίπεδο *xy* βρίσκεται παρατηρητής Α, ακίνητος στο σύστημα S. Ο παρατηρητής βλέπει σε μια χρονική στιγμή φωτόνια από την πηγή να κινούνται προς αυτόν, πάνω σε μια ευθεία που σχηματίζει γωνία *θ* με τον άξονα των *x*, και τα οποία έχουν ενέργεια *E* στο σύστημα του, S.

(α) Να βρεθούν, στο S, οι συνιστώσες της ορμής των φωτονίων συναρτήσει των *E* και *θ*.

(β) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ορμής και ενέργειας, δείξετε ότι ο λόγος των συχνοτήτων στα δύο συστήματα είναι ίσος με:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta} \qquad \left(\beta = \frac{V}{c}\right).$$



(γ) Συζητήστε τις ειδικές περιπτώσεις για $\theta = 0, 90^\circ, 180^\circ$.

(δ) Για ποια τιμή του *θ*, έστω θ_0, είναι $f = f_0$; Πώς εξηγείται αυτό;

Θέμα 4 (3 μονάδες). Θεωρήστε ένα φωτόνιο με ενέργεια E_γ, που κατευθύνεται προς ένα πρωτόνιο ακίνητο στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, (ΣΕ). Η E_γ και η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου, M_{p}, θεωρούνται γνωστά.

(α) Δείξετε ότι, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, η ταχύτητα του συστήματος μηδενικής ορμής του πρωτονίου και του φωτονίου (ΣΜΟ) είναι $V = \dfrac{cE_\gamma}{E_\gamma + M_{\mathrm{p}}c^2}$.

(β) Πόση είναι η ορμή του φωτονίου και πόση η ορμή του πρωτονίου στο ΣΜΟ;

(γ) Πόση είναι η ενέργεια του φωτονίου και πόση η ενέργεια του πρωτονίου στο ΣΜΟ;

Τυπολόγιο

Σχετικιστική Κινηματική:

Μετασχηματισμός της θέσης: Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς S, και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$, τότε:

$$x' = \gamma\left(x - Vt\right) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \qquad \text{όπου} \quad \beta \equiv \frac{V}{c} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Συστολή του μήκους: $\Delta l = \Delta l_0 / \gamma$ (Δl_0 = μήκος ηρεμίας)

Διαστολή του χρόνου: $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0$ (Δt_0 = ιδιοχρόνος)

Μετασχηματισμός της ταχύτητας: $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}$, $\upsilon'_y = \dfrac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}$, $\upsilon'_z = \dfrac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}$.

Φαινόμενο Doppler: Για πηγή που απομακρύνεται από τον παρατηρητή με ταχύτητα $V = \beta c$, πάνω στην ευθεία που τους ενώνει, είναι $f = f_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$.

Σχετικιστική Δυναμική:

$m_0 = m(0) \qquad m = m(\upsilon) = \gamma m_0$ όπου $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$, υ = ταχύτητα του σωματιδίου

$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \gamma m_0 \vec{\boldsymbol{\upsilon}} \qquad E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \qquad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

Για φωτόνια: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} \qquad E = pc$

Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας: $p'_x = \gamma\left(p_x - VE/c^2\right) \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z \quad E' = \gamma\left(E - Vp_x\right)$

Ισοδυναμία μάζας-ενέργειας: $\Delta E = \Delta m\, c^2$

Ηλεκτρομαγνητισμός:

Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

$$E'_x = E_x \qquad E'_y = \gamma\left(E_y - VB_z\right) \qquad E'_z = \gamma\left(E_z + VB_y\right)$$

$$B'_x = B_x \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + VE_z/c^2\right) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - VE_y/c^2\right)$$

Θέμα 1. (α) Ένας παρατηρητής S προσδιορίζει τις θέσεις των δύο άκρων Α και Β ενός τρένου, που κινείται ως προς αυτόν με ταχύτητα V, και βρίσκει ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ τα άκρα βρίσκονται στα σημεία $x_{\mathrm{A}}=L/2$ και $x_{\mathrm{B}}=-L/2$, αντίστοιχα. Ποια είναι η απόσταση L_0 ανάμεσα στα δύο άκρα στο σύστημα S' του τρένου; Σε ποιες χρονικές στιγμές, t'_{A} και t'_{B}, φαίνεται στον S' ότι ο S έκανε τις δύο μετρήσεις; [*Υπόδειξη:* Υπολογίστε. Μη μαντέψετε!]

(β) Ένας παλμός από N_0 ασταθή σωματίδια παράγεται στο σημείο $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=0$, στο σύστημα S του εργαστηρίου. Είναι γνωστό ότι, στο δικό τους σύστημα αναφοράς, τα σωματίδια διασπώνται με μέση διάρκεια ζωής τ. Παρατηρείται ότι στον παλμό παραμένουν N_0/e σωματίδια που δεν έχουν διασπαστεί όταν ο παλμός έχει ταξιδέψει απόσταση L στο εργαστήριο ($\mathrm{e}=2,71828...$ είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων). Με ποια ταχύτητα V κινούνται τα σωματίδια στο σύστημα S του εργαστηρίου; [Δίνεται: Νόμος της ραδιενέργειας: $N(t)=N_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$.]

ΛΥΣΗ

(α) Στο σύστημα S έχουμε

Συμβάν Α: $x_{\mathrm{A}}=L/2 \qquad t_{\mathrm{A}}=0$

Συμβάν Β: $x_{\mathrm{B}}=-L/2 \qquad t_{\mathrm{B}}=0$

Από τον μετασχηματισμό του Lorentz για τη θέση έχουμε τις αντίστοιχες τιμές στο σύστημα S':

Συμβάν Α: $x'_{\mathrm{A}}=\gamma\left(L/2-0\right)=\frac{1}{2}\gamma L \qquad t'_{\mathrm{A}}=\gamma\left(0-\frac{V}{c^2}\frac{L}{2}\right)=-\frac{\gamma V}{2c^2}L$

Συμβάν Β: $x'_{\mathrm{B}}=\gamma\left(-L/2-0\right)=-\frac{1}{2}\gamma L \qquad t'_{\mathrm{B}}=\gamma\left(0+\frac{V}{c^2}\frac{L}{2}\right)=\frac{\gamma V}{2c^2}L$

Μήκος του τρένου στο σύστημα S', στο οποίο τα σημεία Α και Β είναι ακίνητα:

$$L_0=x'_{\mathrm{A}}-x'_{\mathrm{B}}=\tfrac{1}{2}\gamma L-\left(-\tfrac{1}{2}\gamma L\right)=\gamma L\,.$$

(β) Για να μειωθεί ο αριθμός των σωματιδίων κατά ένα παράγοντα e, θα πρέπει να έχει περάσει χρόνος τ από τη δημιουργία τους στο σύστημά τους. Στο σύστημα S, ο χρόνος που πέρασε θα είναι $\gamma\tau$. Σε αυτό το χρόνο, ο παλμός διένυσε απόσταση ίση με L. Η ταχύτητα των σωματιδίων είναι, επομένως, ίση με

$$V=\frac{L}{\gamma\tau}, \qquad \text{από την οποία προκύπτει ότι} \qquad \beta\gamma=\frac{L}{c\tau}\,.$$

Επομένως $\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{L}{c\tau}$ και $\dfrac{1}{\beta^2}-1=\left(\dfrac{c\tau}{L}\right)^2$ ή $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(c\tau/L\right)^2}}$

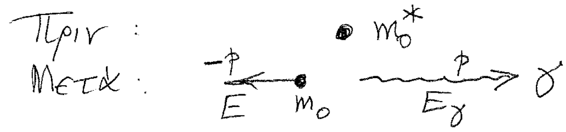
Η ταχύτητα της δέσμης είναι: $V=\dfrac{c}{\sqrt{1+\left(c\tau/L\right)^2}}$ ή $V=\dfrac{L/\tau}{\sqrt{1+\left(L/c\tau\right)^2}}$.

Θέμα 2. Ένας διεγερμένος πυρήνας X^*, με μάζα ηρεμίας m_0^*, αποδιεγείρεται εκπέμποντας ένα φωτόνιο. Η μάζα ηρεμίας του αποδιεγερμένου πυρήνα X είναι m_0.

Ποια είναι η ολική ενέργεια του νέου πυρήνα, E, και η ενέργεια του φωτονίου, E_γ, στο σύστημα αναφοράς του αρχικού πυρήνα; Δώστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των m_0 και m_0^*.

ΛΥΣΗ

$X^* \to X + \gamma$



Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει ότι οι ορμές του νέου πυρήνα και του φωτονίου θα είναι ίσες και αντίθετες, $\pm p$.

Διατήρηση της ενέργειας: $$E + E_\gamma = m_0^* c^2 \qquad (1)$$

Διατήρηση της ορμής: $$p = \frac{E_\gamma}{c} \qquad (2)$$

Επίσης, για τον νέο πυρήνα, $$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 . \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας την E_γ από την εξίσωση (2) στην εξίσωση (1), έχουμε

$$E + pc = m_0^* c^2 . \qquad (4)$$

Η εξίσωση (3) γράφεται ως $$(E - pc)(E + pc) = m_0^2 c^4 . \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας από την (4) στην (5)

$$(E - pc) m_0^* c^2 = m_0^2 c^4 \quad \text{ή} \quad E - pc = \frac{m_0^2}{m_0^*} c^2 . \qquad (6)$$

Αθροίζοντας τις εξισώσεις (4) και (6) και διαιρώντας διά 2, βρίσκουμε την ενέργεια του νέου πυρήνα:

$$E = \frac{1}{2}\left(m_0^* c^2 + \frac{m_0^2}{m_0^*} c^2 \right) \quad \text{ή} \quad E = \frac{m_0^{*2} + m_0^2}{2 m_0^*} c^2 .$$

Η ενέργεια του φωτονίου είναι:

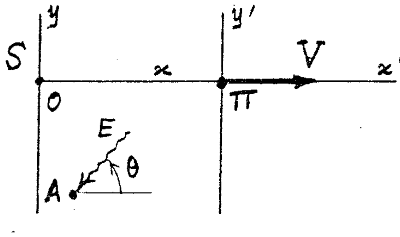
$$E_\gamma = m_0^* c^2 - E = \left(m_0^* - \frac{m_0^{*2} + m_0^2}{2 m_0^*} \right) c^2 \quad \text{ή} \quad E_\gamma = \frac{m_0^{*2} - m_0^2}{2 m_0^*} c^2 .$$

Θέμα 3. Πηγή φωτός Π κινείται με σταθερή ταχύτητα *V* κατά μήκος του άξονα των *x* στο σύστημα αναφοράς S. Η πηγή εκπέμπει, προς όλες τις κατευθύνσεις, φωτόνια τα οποία στο σύστημα αναφοράς S΄ της πηγής έχουν ενέργεια E_0. Στο επίπεδο *xy* βρίσκεται παρατηρητής Α, ακίνητος στο σύστημα S. Ο παρατηρητής βλέπει σε μια χρονική στιγμή φωτόνια από την πηγή να κινούνται προς αυτόν, πάνω σε μια ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των *x*, και τα οποία έχουν ενέργεια *E* στο σύστημα του, S.

(α) Να βρεθούν, στο S, οι συνιστώσες της ορμής των φωτονίων συναρτήσει των *E* και θ.

(β) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ορμής και ενέργειας, δείξετε ότι ο λόγος των συχνοτήτων στα δύο συστήματα είναι ίσος με:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta} \qquad \left(\beta = \frac{V}{c}\right).$$



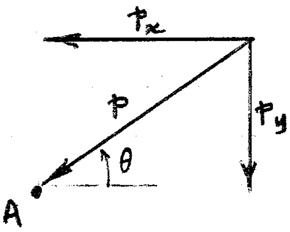
(γ) Συζητήστε τις ειδικές περιπτώσεις για θ=0, 90°, 180°.

(δ) Για ποια τιμή του θ, έστω θ_0, είναι $f = f_0$; Πώς εξηγείται αυτό;

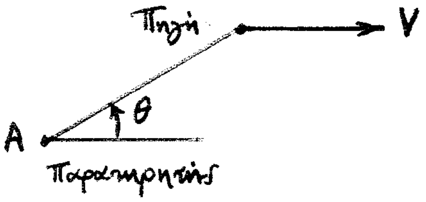
ΛΥΣΗ

(α) Η ορμή ενός φωτονίου που έχει ενέργεια *E* είναι $p = E/c$. Επομένως, στο σύστημα S, οι συνιστώσες της ορμής του φωτονίου είναι:

$$p_x = -\frac{E}{c}\cos\theta \qquad p_y = -\frac{E}{c}\sin\theta \qquad p_z = 0\,.$$



(β) Στο σύστημα αναφοράς S έχουμε φωτόνια με συνιστώσα *x* της ορμής $p_x = -\frac{E}{c}\cos\theta$ και ενέργεια *E*. Επομένως, στο σύστημα αναφοράς της πηγής, S΄, η ενέργεια του φωτονίου είναι:



$$E_0 = E' = \gamma(E - p_x c\beta) = \gamma[E + (E/c)c\beta\cos\theta]$$

και $E_0 = E\gamma(1+\beta\cos\theta)$. Τελικά,

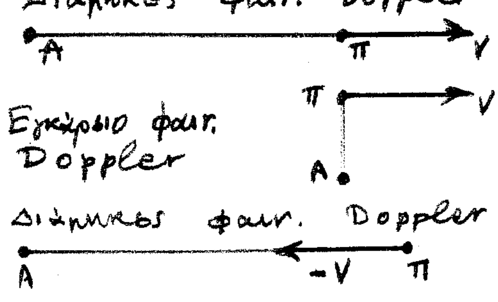
$$\frac{E}{E_0} = \frac{f}{f_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta}, \qquad \text{όπου} \quad \beta = \frac{V}{c}.$$

Αυτή είναι η γενική εξίσωση για το φαινόμενο Doppler.

(γ)

Για θ=0, $\cos\theta$=1, και $\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

(καθαρά διάμηκες φαινόμενο Doppler με την πηγή να απομακρύνεται από τον παρατηρητή).



Για θ=90°, $\cos\theta$=0, και $\frac{f}{f_0} = \sqrt{1-\beta^2}$

(καθαρά εγκάρσιο φαινόμενο Doppler).

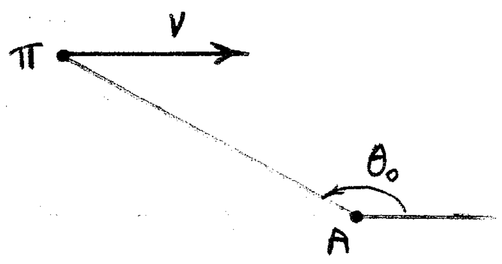
Για θ=180°, $\cos\theta$=–1, και $\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

(καθαρά διάμηκες φαινόμενο Doppler με την πηγή να πλησιάζει τον παρατηρητή).

(δ) Είναι $f = f_0$ όταν είναι $1+\beta \cos\theta_0 = \sqrt{1-\beta^2}$ ή

$$\cos\theta_0 = -\frac{1}{\beta}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right), \qquad (90^{\circ} < \theta_0 < 180^{\circ}) .$$

Για μικρό $\beta \ll 1$, είναι $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1-\frac{1}{2}\beta^2$ και $\cos\theta_0 \approx -\frac{1}{2}\beta$.



Ερμηνεία.

Έχουμε δύο φαινόμενα που αλληλοαναιρούνται:

1. Η σχετικιστική μείωση της συχνότητας που οφείλεται στη διαστολή του χρόνου (εγκάρσιο φαινόμενο Doppler), και
2. Η αύξηση της συχνότητας που οφείλεται στην ακτινική ταχύτητα προσέγγισης της πηγής στον παρατηρητή.

Για $\theta = \theta_0$ τα δύο φαινόμενα αλληλοαναιρούνται πλήρως.

Θέμα 4. Θεωρήστε ένα φωτόνιο με ενέργεια E_γ, που κατευθύνεται προς ένα πρωτόνιο ακίνητο στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, (ΣΕ). Η E_γ και η μάζα ηρεμίας του πρωτονίου, $M_{\rm p}$, θεωρούνται γνωστά.

(α) Δείξετε ότι, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, η ταχύτητα του συστήματος μηδενικής ορμής του πρωτονίου και του φωτονίου (ΣΜΟ) είναι $V = \dfrac{cE_\gamma}{E_\gamma + M_{\rm p}c^2}$.

(β) Πόση είναι η ορμή του φωτονίου και πόση η ορμή του πρωτονίου στο ΣΜΟ;

(γ) Πόση είναι η ενέργεια του φωτονίου και πόση η ενέργεια του πρωτονίου στο ΣΜΟ;

ΛΥΣΗ

(α)

Στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής (ΣΜΟ), το οποίο υποθέτουμε ότι κινείται με ταχύτητα $V = \beta c$ ως προς το σύστημα του εργαστηρίου, το πρωτόνιο έχει ταχύτητα $-V$, όπως προκύπτει από τη σχέση $\upsilon_x' = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}$ για $\upsilon_x = 0$, και ορμή $p_{\rm p}' = \dfrac{-M_{\rm p}\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Το φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\gamma' = E_\gamma\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$ λόγω φαινομένου Doppler, και ορμή $p_\gamma' = \dfrac{E_\gamma'}{c}$.

Στο σύστημα αναφοράς μηδενικής ορμής, η ολική ορμή είναι ίση με μηδέν. Άρα $p_\gamma' = p_{\rm p}'$.

Επομένως, $\dfrac{E_\gamma'}{c} = -p_{\rm p}'$ και $\dfrac{E_\gamma}{c}\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} = \dfrac{M_{\rm p}\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ή $\dfrac{E_\gamma}{c}(1-\beta) = M_{\rm p}\beta c$

$$\frac{E_\gamma}{c} = \beta\left(\frac{E_\gamma}{c} + M_{\rm p}c\right) \quad \text{και τελικά} \quad \beta = \frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_{\rm p}c^2}$$

είναι η ταχύτητα του συστήματος αναφοράς μηδενικής ορμής.

(β) Η ταχύτητα του πρωτονίου στο σύστημα μηδενικής ορμής είναι $-V$. Η ορμή του είναι, επομένως, $p = -\gamma\beta M_{\rm p}c$. Εδώ

$$\beta\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1/\beta^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(E_\gamma + M_{\rm p}c^2)^2}{E_\gamma^2} - 1}} = \frac{E_\gamma}{\sqrt{M_{\rm p}c^2(2E_\gamma + M_{\rm p}c^2)}}$$

και έτσι $p = \dfrac{-E_\gamma M_{\rm p}c}{\sqrt{M_{\rm p}c^2(2E_\gamma + M_{\rm p}c^2)}}$. Η ορμή του φωτονίου στο σύστημα μηδενικής ορμής είναι $-p$.

(γ) Η ενέργεια του φωτονίου στο σύστημα μηδενικής ορμής είναι

$$E_\gamma' = E_\gamma\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = E_\gamma\sqrt{\frac{M_{\rm p}c^2}{2E_\gamma + M_{\rm p}c^2}} < E_\gamma .$$

Του πρωτονίου, είναι: $E_{\rm p}' = \dfrac{M_{\rm p}c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{M_{\rm p}c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{E_\gamma^2}{\left(E_\gamma + M_{\rm p}c^2\right)^2}}} = \dfrac{M_{\rm p}c^2\left(E_\gamma + M_{\rm p}c^2\right)}{\sqrt{M_{\rm p}^2c^4 + 2E_\gamma M_{\rm p}c^2}} = \dfrac{E_\gamma + M_{\rm p}c^2}{\sqrt{1 + 2\dfrac{E_\gamma}{M_{\rm p}c^2}}}$